Les fonctions exponentielles

Définitions et théorèmes :

Par définition, La fonction exponentielle est bijection réciproque de la fonction ln.

On la note exp. Pour tout x réel, $\exp(x)=e^x$

Règles de calculs :

$e^0=1$ $\quad e^{x+y}=e^x\times e^y$ $\quad e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ $\quad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ $\quad (e^x)^n=e^{nx}$

Étude et représentation graphique de la fonction exponentielle :

a) Sens de variation :

La fonction exponentielle est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)=\exp'(x)$ d'où $\exp'(x)>0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante.

On dit que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

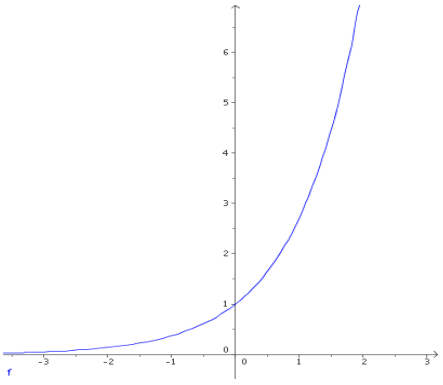
Conséquences :

$e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$; $e^x>e^y\Leftrightarrow x>y$; $\forall x\in]-\infty;0[$, $0<e^x<1$; $\forall x\in]0;+\infty[$, $e^x>1$

b) Limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$



c) Autres limites importantes :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$ donc en particulier pour $n=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0}$ donc en particulier pour $n=1$: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}$

Fonctions exponentielles de base a (a > 0) :

a) Définition :

On appelle fonction exponentielle de base a ($a\in\mathbb{R}_+^*$) la fonction qui se note $x\to\exp_a(x)$ ou $x\to a^x$. $a^x=e^{x\ln(a)}$

Par conséquence : $\forall b\in\mathbb{R}$ et $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$

$a^b=e^{b\ln(a)}$

$\Leftrightarrow \ln(a^b)=b\ln(a)$

b) Étude de variation :

Soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x)=a^x=e^{x\ln(a)}$ ($a\in\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_a'(x)=\ln(a)\cdot e^{x\ln(a)}=\ln(a)\cdot a^x$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $a^x=e^{x\ln(a)}>0$ donc $f_a'(x)$ est du signe de $\ln(a)$.

Donc 3 cas possibles :

Si a = 1 : f_a est la fonction $x\to 1$.

Si a > 1 :

$\ln(a)>0$ donc :

$f_a'>0$ et donc la fonction f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

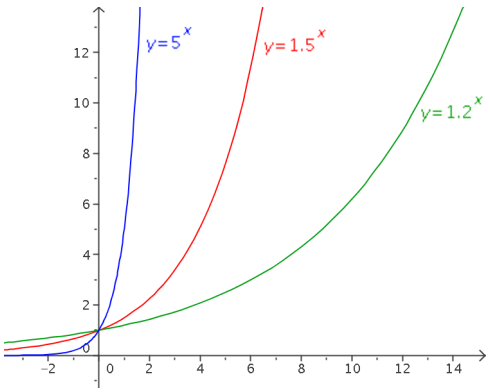
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(a)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(a)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)}=0$

On en déduit donc ce tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f_a(x)$		↗	0	↗	1	↗	$+\infty$
					a		

Exemples :



Si 0 < a < 1 :

$\ln(a)<0$ donc :

$f_a'<0$ et donc la fonction f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

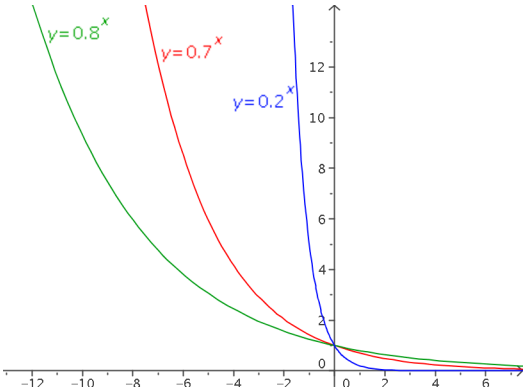
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(a)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(a)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)}=+\infty$

On en déduit donc ce tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

Exemples :



Remarque : Les courbes représentatives des fonctions $x\to a^x$ et $x\to\left(\frac{1}{a}\right)^x$ avec $a>0$ sont symétriques d'axe la droite d'équation $x=0$. En effet, $a^x=e^{x\ln(a)}$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^x=e^{x\ln\left(\frac{1}{a}\right)}=e^{-x\ln(a)}$.

c) Primitives :

Les fonctions $x\to a^x$ admettent pour primitives les fonctions $x\to\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$ avec C une constante réelle, $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$. (Si a=1 alors les primitives sont les fonctions $x\to x+C$)

d) Règles de calcul :

Les règles de calcul sont les même qu'avec la fonction exponentielle qui n'est en fait qu'un cas particulier : (a et b sont des réels strictement positifs)

$a^0=1$ $a^{x+y}=a^x\times a^y$ $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ $a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$ $(a^x)^n=a^{nx}$ $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ $(ab)^x=a^xb^x$

Fonctions puissance :

a) Définition :

On appelle fonction puissance toute fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha=x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$.

b) Étude de variation :

f_α est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f_\alpha(x)=(\alpha\ln(x))'x^\alpha=\frac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$.

Sens de variation :

Si $\alpha>0$ alors $f'_\alpha(x)>0$ et donc f_α est strictement croissante.
Si $\alpha<0$ alors $f'_\alpha(x)<0$ et donc f_α est strictement décroissante.

Limites :

Si $\alpha>0$:
$\lim\limits_{x\to0}\alpha\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}x^a=0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^a=+\infty$
Si $\alpha<0$:
$\lim\limits_{x\to0}\alpha\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}x^a=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^a=0$

Tableaux de variations :

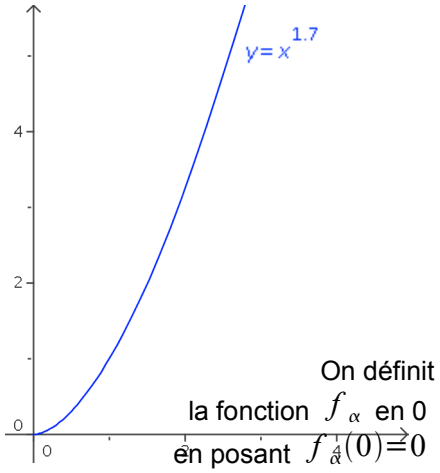
$\alpha>0$:

x	0		$+\infty$
x^α	$\|\|$	$\nearrow$	$+\infty$
	$\|\|0$		

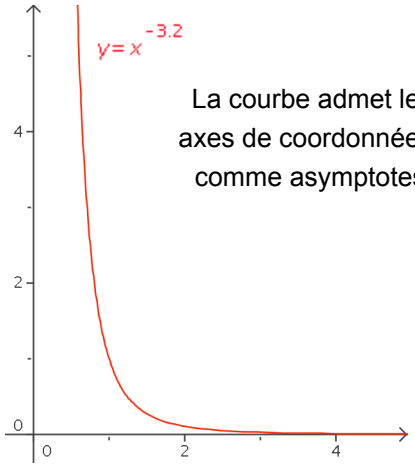
$\alpha<0$:

x	0		$+\infty$
x^α	$\|\|+\infty$	$\searrow$	0

Représentation graphique :



On définit la fonction f_α en 0 en posant $f_\alpha(0)=0$



La courbe admet les axes de coordonnées comme asymptotes.